30/11/15

$\circledast$

~~[illegible]~~ Έστω $y^{(n)} + f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$, με $f$ συνεχής στο $[0,1]\times\mathbb{R}^n$

με αρχικές τιμές $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$ $\circledast$

Τότε η $\varphi$ θα είναι $\varepsilon$-λύση του Π.Α.Τ. αν:

(i) $\exists\, \varphi^{(n)}$

(ii) ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες

(iii) $|\varphi^{(n)}(x) + f(x, \dots)| < \varepsilon$, $\forall x \in [0,1]$.

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το $G$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχές υποσύνολο του $C(A, \mathbb{R})$ αν $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)$ $(\forall x_1, x_2 \in A) : |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, $\forall f \in G$

Θεώρημα: $G = \{f(x, \cdot, \cdot, \dots)\}$ $x \in [0,1]$ είναι ομοιόμορφα ισοσυνεχές και $y$ μία λύση του Π.Α.Τ., τότε αυτό $(\forall \varepsilon > 0)$ έχει ~~[illegible]~~ $\varepsilon$-λύση.

Απόδ.: Έστω $\varepsilon > 0$, αφού ~~[illegible]~~ $G$ ομ. ισοσυνεχές $\exists \delta > 0$ με $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$

Αφού $y$: λύση του Π.Α.Τ. $\Rightarrow$

$\xrightarrow[\text{Θ. Weierstraß}]{} |\, y^{(n)}(x) - P(x)| \le \frac{\delta}{\sqrt{n}}$, $P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_\nu x^\nu$

$$q(x) = y_0 + y_1 x + \frac{1}{2!} y_2 x^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} y_{n-1} x^{n-1} + \frac{1}{n!} \alpha_0 x^n + \frac{1}{(n+1)!} \alpha_1 x^{n+1} + \dots + \frac{\nu!}{(n+\nu)!} x^{n+\nu}$$

$q^{(n)}(x) = P(x)$

$q^{(n-1)}(x) = y_{n-1} + \int_0^x P(s)\,ds$

$|q^{(n-1)}(x) - y^{(n-1)}(x)| = |y^{(n-1)}(0) + \int_0^x y(s)\,ds - y_{n-1} - \int_0^x P(s)\,ds| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$

Δμ] $|q^{(s)}(x) - y^{(s)}(x)| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}$

$d_1 = \max |x_i - y_i|$, $\forall i = 1, \dots, n$. $\delta_1 \le \delta(x,y) \le \sqrt{n}\, \delta(x,y)$

Αφού $g$: λύση του Π.Α.Τ.: $|(y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) - (g(x), \dots, g^{(n-1)}(x))| < \delta$

δηλ. $|\underbrace{\cancel{y^{(n)}} + f(x, y, \dots, y^{n-1})}_{0 \text{ (λύση)}} - g^{(n)}(x) - f(x, g, \dots, g^{n-1})| =$

$= |g^{(n)}(x) + f(x, g(x), \dots)| \leq |y^{n}(x) - g^{(n)}(x)| + |f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)| \leq$

$\leq \frac{\delta}{\sqrt{n}} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$

---

$$\begin{cases} y''(x) + xy(x) - x^2 = 0, & x \in [0,1]. \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases} \qquad f(x, y, y_2, \dots) = xy - x^2$$

$|f(x,y) - f(x,y')| = |(xy - \cancel{x^2}) - (xy' - \cancel{x^2})| \leq |x||y - y'| \leq |y - y'|$

Έστω $\varepsilon > 0$, $g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_\nu x^\nu$

$g(0) = 0$ $\quad |g''(x) + xg(x) - x^2| < \varepsilon \Rightarrow$

$g'(0) = 0$ $\quad \Rightarrow |2\alpha_2 + (2 \cdot 3\alpha_3 + \alpha_0)x + (3 \cdot 4\alpha_4 + \alpha_1 - 1)x^2 +$

$+ \sum_{k=3}^{\nu-2} [(k+1)(k+2)\alpha_{k+2} + \alpha_{k-1}] x^k + \alpha_{\nu-2} x^{\nu-1} +$

$+ \alpha_{\nu-1} x^\nu + \alpha_\nu x^{\nu+1}| < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow |\alpha_{\nu-2} x^{\nu-1} + \alpha_{\nu-1} x^\nu + \alpha_\nu x^\nu| < \varepsilon \Rightarrow 2\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0$

$2 \cdot 3\alpha_3 + \cancel{\alpha_0}^{0} = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$

$3 \cdot 4\alpha_4 + \cancel{\alpha_1}^{0} - 1 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = \frac{1}{3 \cdot 4}$

$(k+1)(k+2)\alpha_{k+2} + \alpha_{k-1} = 0, \ k = 3, \dots, \nu-2$

$4 \cdot 5\alpha_5 + \cancel{\alpha_2}^{0} = 0 \Rightarrow \alpha_5 = 0$

$5 \cdot 6 \cdot \alpha_6 + \cancel{\alpha_3}^{0} = 0 \Rightarrow \alpha_6 = 0$

$6 \cdot 7 \cdot \alpha_7 + \alpha_4 = 0 \Rightarrow \alpha_7 = -\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$

άρα $\alpha_\lambda = \begin{cases} 0, & \lambda = 3k \\ (-1)^{k+1}/3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3k) \cdot (3k+1) & \lambda = 3k+1 \\ 0 & \lambda = 3k+2 \end{cases}$

άρα $|\alpha_\lambda x^{\lambda+1}| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$|\alpha_\lambda| < \varepsilon$

$\nu: \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3\nu)(3\nu+1)} < \varepsilon$

$$P(x) = \frac{1}{3 \cdot 4} x^4 - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \dots + \frac{(-1)^k}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3k)(3k+1)} x^{3k+1}$$

με $k$ τ.ω. $\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3k)(3k+1)} < \varepsilon$

$$y(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{3 \cdot 4 \cdots (3k)(3k+1)} x^{3k+1}$$

Θεώρημα: Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $\exists (P_\nu)\downarrow$ με $P_\nu \rightrightarrows f$

Αποδ: $\left|f(x)+\frac{3}{2^{\nu+1}}-P_\nu(x)\right|<\frac{1}{2^{\nu+1}}=\varepsilon$, $\forall x\in[0,1]$.

$$f_\nu(x)=f(x)+\frac{1}{2^\nu},\ \nu=0,1,2,\dots$$

$$-\frac{1}{2^{\nu+1}}\le f(x)+\frac{3}{2^{\nu+1}}-P_\nu(x)\le\frac{1}{2^{\nu+1}}\Rightarrow P_\nu(x)\le f(x)+\frac{3}{2^{\nu+1}}-\frac{1}{2^{\nu+1}}=$$

$$=f(x)+\frac{3}{2^{\nu+1}}=f(x)+\frac{1}{2^\nu}=f_\nu(x)$$

$$P_\nu(x)\ge f(x)+\frac{3-\frac{1}{2^{\nu+1}}}{2^{\nu+1}}=f(x)+\frac{4}{2^{\nu+1}}=f(x)+\frac{1}{2^{\nu-1}}=f_{\nu-1}(x)$$

άρα $\cancel{f_0\le P_1(x)\le f_1(x)\le\dots\le P_\nu(x)\le f_\nu(x)}$ $f_0(x)\ge P_1(x)\ge f_1(x)\ge\dots$

$\ge\dots\ge P_\nu(x)\ge f_\nu(x)$

$P_\nu$: φθίνουσα, $\nu=0,1,2,\dots$

$$\rho_u(P_\nu,f)=\sup|P_\nu(x)-f(x)|\le\frac{1}{2^{\nu-1}}\to 0,\ \nu=0,1,\dots$$

άρα $P_\nu\rightrightarrows f$

$\forall f\in\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $\exists P_\nu\in P([0,1])$, $P_\nu\rightrightarrows -f$, $P_\nu\downarrow$

$q_\nu=-P_\nu$, $q_\nu\uparrow$, $q_\nu\rightrightarrows f$

Πολ. συν. $n$ μεταβλ. , $n \in \mathbb{N}$. , $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\boxed{\text{Θεώρημα Weierstrass στον } \mathbb{R}^n}$ : $\forall f \in \mathcal{C}([0,1]^n, \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}([0,1]^n)$ τ.ω. $\hat{\rho}_u(f,P) < \varepsilon$

Απόδειξη: Για $n=1$ έχουμε το Θ. Weierstrass

Υποθ. ότι ισχύει για $n=k$,

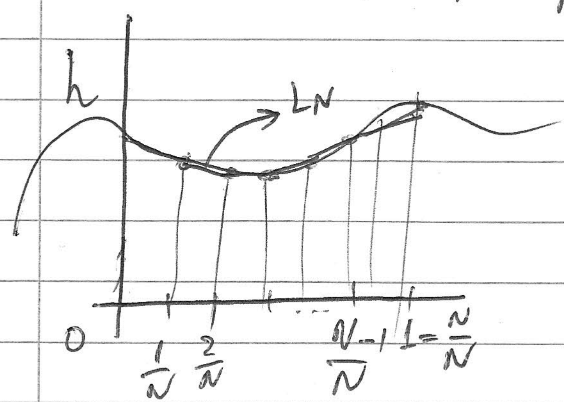
$\forall f \in \mathcal{C}([0,1]^k, \mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathcal{P}([0,1]^k)$, $\hat{\rho}_u(f, P) < \varepsilon$

Έστω $h \in \mathcal{C}([0,1]^{k+1}, \mathbb{R})$. Επειδή $[0,1]^{k+1}$ συμπαγές $\Rightarrow$

$\Rightarrow h$ είναι ομοιόμορφα συνεχής $\Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall \bar{x}, \bar{y} \in [0,1]^{k+1}$ με

$|\bar{x} - \bar{y}| < \delta \Rightarrow |h(\bar{x}) - h(\bar{y})| < \varepsilon_1$

Έστω $N \in \mathbb{N}$, $\left[\frac{\lambda}{N}, \frac{\lambda+1}{N}\right]$, $\lambda = 0, 1, \dots$, $N > \frac{1}{\delta}$, $\delta > \frac{1}{N}$




$L_N(x_{k+1})$

$\cancel{L_N(x_1, \dots, x_{k+1})} = \alpha_0(x_1, \dots, x_k) + \sum_{\lambda=1}^{N} \alpha_\lambda(x_1, \dots, x_k) \cdot$

$|x_k - \frac{\lambda}{N}|$

$P_v \to f(\dots)$